ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИДАКТИЧЕСКИХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ИНФОРМАЦИОННЫХ И КОММУНИКАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ПРОЦЕССЕ ПОДГОТОВКИ К ЕДИНОМУ ГОСУДАРСТВЕННОМУ ЭКЗАМЕНУ, НА ОСНОВЕ УПРОЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ПРИЕМОВ

А.А. Русаков, Е.Л. Ситкин

Россия, г. Москва

Интерактивная геометрическая среда (ИГС) – мультимедиа информационная технология (программное обеспечение, специально разработанное, для образовательных целей и позволяющее выполнять на компьютере геометрические построения, состоящие из геометрических объектов, а также задавать соотношения между этими объектами). Примерами разработанных современных ИГС могут служить, уже зарекомендовавшие себя в организации учебного процесса «Живая математика», «Математический конструктор» (1С Репетитор), «GeoGebra», «GEONEXT».

В школьной геометрии традиционно используются два метода решения задач: синтетический и аналитический. Каждый из них имеет свои преимущества и недостатки. Условно можно сказать, что синтетические методы требуют изобретательности, умения находить нестандартные связи. Аналитические методы требуют дополнительных знаний (начальные сведения из аналитической геометрии), но применить их часто оказывается проще. В настоящее время школы работают по новым образовательным стандартам, в результате изменились требования к знаниям и умениям школьников, особенно по стереометрии. Обозначились задачи стереометрии, которые необходимо научиться решать школьнику: вычисление расстояний между скрещивающимися прямыми, расстояний от точки до прямой, от точки до плоскости, нахождение величин углов между прямыми, между плоскостями, между прямой и плоскостью. Эти задачи вынесены на Единый государственный экзамен (ЕГЭ) в раздел С2 их решение обязательно для основной массы выпускников. Вот здесь и помогают навыки владения аналитическим методом, а навыки и приемы осваиваем, используя дидактические возможности информационных и коммуникационных технологий (ИКТ).

Задача. Основанием прямого прямоугольного параллелепипеда ABCDA1B1C1D1 является квадрат с длиной стороны 12. Высота параллелепипеда 21. На ребре AA1 взята точка M такая, что AM=8. На ребре BB1 взята точка K такая, что B1K=8. Найти расстояние от точки A1 до плоскости MKD1.

Из понятийного аппарата необходимы знания темы «Векторы», в частности скалярного произведения векторов в координатах и его свойства. Значительная часть обучения в школе связана с формированием знаний об окружающем нас мире через формирование образов предметов, объектов, явлений. Первое знакомство с геометрическими объектами, в соответствии с предлагаемой методикой, происходит с использованием ИГС, что позволяет обеспечить их наглядную визуализацию и деятельностное изучение в ходе освоения соответствующих операций чертежной плоскости или пространства, а уже затем переходить к логическому описанию изученных объектов и их свойств в общей системе геометрических фигур. Деятельностное изучение, в нашем случае темы «Векторы», обеспечивается дидактическими возможностями многократного эксперимента в освоении понятий, динамическими возможностями работы с векторами, интерактивностью (системой подсказок), системой автоматического контроля за выполнением упражнений.

Найдем координаты некоторого ненулевого вектора, перпендикулярного одновременно к двум неколлинеарным векторам пространства (открываем ИГС, задаем неколлинеарные векторы и плоскость параллельную им, математический конструктор показывает вектор перпендикулярный исходным). Для этих векторов найдется плоскость, которой они будут параллельны.

Искомый вектор будет перпендикулярен этой плоскости. Следовательно, все такие векторы будут коллинеарными, и нам достаточно найти один из таких векторов (ИГС позволяет показать пучок коллинеарных векторов, смоделировать искомый вектор). На каждом этапе учебной деятельности:

1) при знакомстве (до знакомства со способами построения; для выявления сущностных характеристик; в качестве наглядной иллюстрации),

2) во время анализа условий задачи (выявление закономерностей; нахождение граничных условий; проверка гипотез),

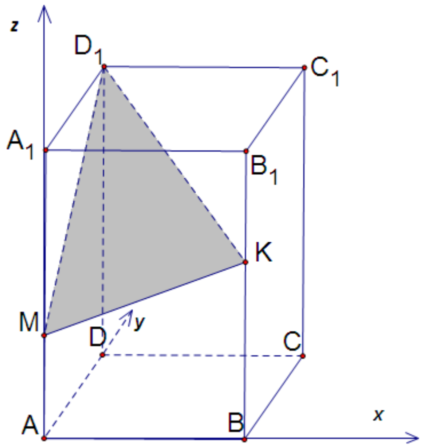
3) во время решения задачи (нахождение геометрического места точек; вычисление значений длин, углов, площадей) можно, и мы считаем нужно, применять ИГС.

Дидактические возможности ИКТ: моделирование, простота и скорость сравнительно с традиционными средствами, возможность создания демонстраций, сопровождение учащегося, построение графиков и выполнение математических расчетов – основные возможности ИГС. Эти возможности существенно облегчают усвоение материала школьником на каждом этапе учебной деятельности. Часто при размещении какой-либо фигуры в системе координат появляется:

А) пара векторов, имеющих хотя бы в одном координату ноль. Пусть это будут векторы $\vec{a}(p;0;q)$ и $\vec{b}(m;n;k)$. Надо найти произвольный вектор $\vec{c}$, перпендикулярный $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одновременно. Скалярное произведение векторов $\vec{a}\vec{c}$ и $\vec{b}\vec{c}$ должно быть равно нулю. Положим $\vec{c}(-q;x;p)$, тогда $\vec{a}\vec{c}=0,\ \vec{b}\vec{c}=-qm+xn+pk.$ Неизвестная координата x является решением уравнения $-qm+xn+pk=0 \Rightarrow x=\dfrac{qm-pk}{n}$. Окончательно, $\vec{c}=(-q;\dfrac{qm-pk}{n};p)$;

Б) очень часто встречаются пары векторов имеющих по две одинаковые координаты, а третьи координаты противоположны по знаку, но равные по модулю, например, $\vec{a}=(m;n;k)$ и $\vec{b}=(m;n;-k)$. Тогда, в качестве векторов, перпендикулярных к данным, можно рассмотреть векторы $\vec{c}=(n;-m;0)$ или $\vec{r}=(-n;m;0)$;

В) если дан общий случай: $\vec{a}=(n;m;p)$ и $\vec{b}=(e;z;s)$, то вначале определим $\vec{c}=\vec{b}-k\vec{a}$, причем коэффициент $k\neq 0$ должен быть подобран таким образом, чтобы в координатах вектора $\vec{c}$ присутствовал 0. Ясно, что вектор ортогональный $\vec{a}$ и $\vec{c}$, ортогонален $\vec{a}$ и $\vec{b}$, далее надо действовать по алгоритму случая А). Решение задачи на рис. 1.



Введем систему координат с центром в точке *A*, как показано на рис.1. Координаты вектора $\overrightarrow{MK}=(12;0;5)$, а вектора $\overrightarrow{MD_1}=(0;12;13)$. Эти векторы определяют плоскость MKD_1.

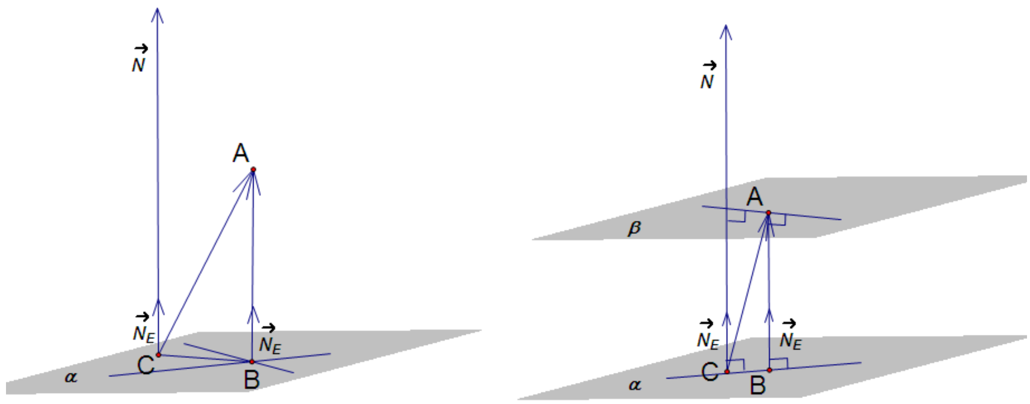
1) Найдем вектор $\overrightarrow{F_N}$ единичной длины, ортогональный $\overrightarrow{MK}$ и $\overrightarrow{MD_1}$ одновременно. Для этого возьмем любой вектор $\overrightarrow{F_P}$, ортогональный как $\overrightarrow{MK}$ так и $\overrightarrow{MD_1}$. Можно, например, положить $\overrightarrow{F_P}=(-5;-13;12)$. Далее положим $\overrightarrow{F_N}=\overrightarrow{F_P}/\left|\overrightarrow{F_P}\right|=(\frac{-5}{13\sqrt{2}};-\frac{-13}{13\sqrt{2}};-\frac{12}{13\sqrt{2}})$.

2) Найдем координаты любого вектора, начало которого лежит в плоскости MKD_1, а конец в точке A_1 (или наоборот - начало в точке A_1, а конец в плоскости MKD_1). Ясно, что нам подойдет вектор $\overrightarrow{KA_1}=(-12;0;8)$.

3) Расстояние от точки A_1 до плоскости MKD_1 равно модулю скалярного произведения векторов $\overrightarrow{KA_1}$ и $\overrightarrow{F_N}$. Или $\rho(A_1;MKD_1)=\left|\overrightarrow{F_N}\cdot\overrightarrow{KA_1}\right|=6\sqrt{2}$

Использование интерактивных геометрических сред является для школьников более привлекательным занятием по сравнению с использованием традиционных инструментов. ИГС позволяют не просто строить чертежи, но создавать наглядные модели геометрических объектов, способные видоизменяться согласно заложенным при их построении ограничениям.

Проясним отдельно последний пункт 3). Расстояние от точки до плоскости равно модулю скалярного произведения единичного вектора нормали к плоскости и любого вектора, начало которого лежит в плоскости, а конец в точке – расстояние от которой до плоскости следует найти. Угол между этими векторами может быть тупой и тогда скалярное произведение отрицательно, но это произведение выражает расстояние, следовательно, ставим модуль. Рассмотрим алгоритм вычисления расстояния от точки до плоскости более подробно.



а *б*

Рис. 2.

Пусть дан прямоугольный треугольник *CAB* с прямым углом *B*. Отношение $\frac{|\overrightarrow{BA}|}{|\overrightarrow{CA}|} = \cos\angle A$ (рис. 2 а). Отсюда следует, что $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{CA}| cos\angle A$ и, если правую часть умножить на длину единичного вектора нормали $|\overrightarrow{N_E}|$, то равенство не изменится: $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{N_E}||\overrightarrow{CA}| \cdot \cos\alpha$. Значит $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{N_E}|$. Так как расстояние между прямыми, совпадает с расстоянием между параллельными плоскостями, в которых лежат эти прямые, то можно выбрать точку на одной прямой и задачу вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми, свести к задаче вычисления расстояния от точки до плоскости, в которой лежит вторая прямая (рис. 2 б).

Таким образом, мы получили одинаковый алгоритм для решения двух базовых задач стереометрии: вычисления расстояний между скрещивающимися прямыми и расстояний от точки до плоскости [1].

Литература

1. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. М.: Наука, 1974. 267 с.